

LINEE LARGHE

Un'ambiguità geometrica dimenticata

Jens Høyrup

5 luglio, 1994

Published in

Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche **15** (1995), 3–14

LINEE LARGHE

Un'ambiguità geometrica dimenticata*

In memoriam

A. P. YOUSCHKEVITCH, 1906–1993

et

IVOR BULMER-THOMAS, 1905–1993

Le pagine che seguono esplorano le tracce di un modo di pensare le aree e le lunghezze che a noi pare strano ma che in varie culture matematiche è stato così consueto che era superfluo spiegarlo; così strano e così consueto, infatti, che gli storici moderni hanno dichiarato sbagliati, confusi o privi di senso i passi nelle fonti che riflettono questa struttura concettuale. Si tratta dell'abitudine di immaginarsi le linee come portatrici di una larghezza virtuale di una unità, e le aree come composte di strisce unitarie di questa sorta: abitudine diffusa in molti ambienti di agrimensura pratica (dove è facile, grazie all'uniformità delle usanze, essere d'accordo su una sola larghezza standardizzata: quella dell'unità primaria di lunghezza; dove, per così dire, la terra si misura come si vendono ancora oggi le stoffe con la loro larghezza fisicamente fissata) – abitudine però che si riflette anche in testi con provenienza più teorica benché ancora ispirati o tinti dalla misura pratica e dal suo linguaggio.

Agrimensura italiana, da Fibonacci a Pacioli

Nell'introduzione alla sua *Pratica geometrie*, Leonardo Fibonacci fa un'esposizione della misura lineare e di quella superficiale [ed. Boncompagni 1862: 3–4]. Le prime righe non hanno niente che possa sorprendere una

* Ringrazio Isabella Chiari, sia per la correzione linguistica che per avermi incoraggiato a scrivere in lingua italiana. Visto che io ho procurato la boscaglia sintattica iniziale e che ho dovuto riformulare parecchi passi dopo il controllo, è ovvio che chi scrive rimane responsabile degli errori e i periodi inadatti che restano.

mente moderna: la *cubita superficialis* è un quadrato con lato uguale ad una *cubita linealis*; la stessa relazione valga per l'*ulna superficialis* rispetto all'*ulna linealis* e per la *pertica superficialis* rispetto alla *pertica linealis*.

A partire di questo punto, Fibonacci il pisano procede con il sistema utilizzato a Pisa – che si distingue delle nostre abitudini. Una pertica, in verità, è composta di 6 piedi, e il piede di 18 punti o once. Anche una pertica quadrata o superficiale è composta di 6 piedi superficiali poiché (come spiega Fibonacci) un piede superficiale possiede la lunghezza di 1 pertica ed la larghezza di $\frac{1}{6}$ pertica (ossia 1 piede). La misura di un piede in quadrato, invece, si chiama *denarius*. Una oncia superficiale ugualmente è un rettangolo 1 pertica×1 oncia.

Per le aree più grandi sono utilizzati la *scala* (= 4 pertiche), il *panorum* (= $5\frac{1}{2}$ pertiche), il *stariorum* (= 12 panori) ed il *modiorum* (= 24 staiori). Tutti questi sono dapprima misure superficiali, ma sono anche intesi come misure lineari – dove 1 panoro lineare è la lunghezza che, provvista di una larghezza di 1 pertica, è uguale a 1 panoro superficiale. Sono utilizzati (ci dice Fibonacci) nel commercio dei campi, dei terreni fabbricabili e delle case – dunque nella vita pratica.

Altrettanto si trova quando Luca Pacioli spiega nella parte geometrica della *Summa di arithmetica* [1523: II, fol. 6^v-7^r] le misure utilizzate a Firenze nella vendita dei terreni. Qui, la larghezza ricorrente è la *braccia*:

Moltiplicando bracia per bracia: Fanno bracia quadre.

Moltiplicando bracia per pugnora fanno pugnora.

Moltiplicando bracia per panora fanno panora: moltiplicando per staiora fanno staiora.

...

(1 staioro = 12 panori = 12^2 pugnori = 12^3 braccia). Tutta la struttura dell'esposizione, come pure la metrologia descritta, dimostra che in questo passo Pacioli non dipende da Fibonacci; parla dunque di un sistema realmente utilizzato al suo tempo nel suo paese.

L'Egitto faraonico

Questo modo di pensare le aree come composte di strisce di larghezza standardizzata si ritrova altrove nelle metrologie pratiche. Ben conosciuto è l'esempio dell'antico Egitto [Peet 1923: 24–25]. Per misurare le terre si utilizzava la misura lineare *khet* o «corda» uguale a 100 cubiti. La misura superficiale fondamentale dei testi scolastici era il *setat* o *khet* quadro. Tuttavia, per l'agrimensura pratica si utilizzavano più spesso il «cubito di suolo» e il «mille di suolo», con un lato uguale ad un cubito e mille cubiti, rispettivamente, e l'altro uguale ad un *khet*.

La metrologia descritta da Peet è quella del secondo millennio. Però, anche se la matematica dell'Egitto ellenistico e romano ha un carattere eclettico, con molte influenze di provenienza babilonese, persiana o aramaica, il tratto che ci interessa qui si ritrova nei papiri demotici. Così, il «cubito di suolo» ritorna in un papiro dell'epoca romana [ed. Parker 1972: 71]. Ancora più notevole è un altro passo dello stesso papiro, dove l'*aroura* (il *khet* quadro, il quadrato con lato di 100 cubiti) è utilizzato come unità di lunghezza, uguale a 100 cubiti (senza che il nome dell'unità sia indicato, è vero, ma un'altra unità di 100 cubiti non esisteva all'epoca) [ed. Parker 1972: 72].

La matematica paleobabilonese

È meno conosciuta (perché meno visibile nella metrologia) la presenza della stessa struttura nel pensiero paleobabilonese. Ben noto, invece, è il ruolo della concezione corrispondente nella misura dei volumi. Per le misure orizzontali, l'unità di base era il NINDAN o «pertica» (uguale a 12 cubiti, dunque circa 3 volte quella romana); per le misure verticali, d'altra parte, l'unità di base era il cubito. I volumi si misuravano in unità superficiali, intese semplicemente come provviste di una altezza di 1 [cioè, 1 cubito]. Altrimenti detto, al momento che si pensa ai volumi, le unità superficiali sono viste come fette alte 1 cubito.

Per vedere come la stessa idea entri nel concetto delle superfici bisogna analizzare la terminologia utilizzata nel loro calcolo. Fra i termini abitualmente tradotti come moltiplicazione, due sembrano legati a questo calcolo: *šutākulum* (o, piuttosto, *šutakūllum*, probabilmente «fare che i due 'fattori' si tengano», cioè come lati di un rettangolo) e *našûm*, «alzare», con i loro

sinonimi rispettivi¹. Eppure *šutakūllum* non denota un calcolo ma *la costruzione* del rettangolo; di solito, questa costruzione comporta un calcolo dell'area del rettangolo, che è data immediatamente dopo la costruzione; ma talora si parla del calcolo in una frase separata, e per il calcolo dell'area di un rettangolo già costruito si utilizza «alzare». Per il calcolo delle aree dei triangoli, dei trapezi e dei quadrangoli irregolari i calcolatori babilonesi si servono sempre dell'operazione «alzare».

«Alzare» si utilizza in generale per tutti i calcoli di grandezze concrete mediante la moltiplicazione. Di regola, l'ordine dei fattori dipende da considerazioni puramente stilistiche; per esempio, di solito è la grandezza appena calcolata che è alzata all'altra. C'è però un'eccezione, e una sola: nel calcolo dei volumi, è sempre la base B che è alzata all'altezza a . Si tratta dunque di una metafora viva nel calcolo dei volumi e morta in tutti gli altri luoghi – per conseguenza di una metafora la cui origine si trova esattamente nel calcolo dei volumi: un prisma $a \times B$ si ottiene quando «l'altezza virtuale» della base, quella di una superficie B vista come fetta (dunque 1 cubito), è «alzata» all'altezza vera a . L'idea corrisponde alla definizione della moltiplicazione trovata nei *Elementi* di Euclide (VII, def. 15): Il prodotto di a e B contiene B tante volte quante a contiene l'unità.

Il trasferimento della metafora alla misura delle superfici presuppone che le superfici siano viste come composte di strisce (di larghezza 1 NINDAN, come sono composti i volumi di fette alte 1 cubito). Allora, un rettangolo $a \times b$ si ottiene quando la striscia $1 \times b$ (la cui area è uguale alla sua lunghezza b) è «alzata» alla larghezza vera a .

Un altro luogo dove si manifesta l'idea di una «larghezza virtuale» della linea è nei testi detti «algebrici». È una vecchia osservazione che in questi testi le lunghezze sono addizionate alle aree o ne sono sottratte – operazioni che sono state viste come geometricamente assurde, ciò che è stato uno degli argomenti centrali per vedere questa «algebra» come una tecnica puramente numerica, nonostante il suo vocabolario geometrico². Come

¹ Per i termini «moltiplicativi» della matematica paleobabilonese e le loro interpretazioni, vedere [Høyrup 1990a: 46–49 e passim]; per l'origine e lo sviluppo del concetto di «alzare», vedere [Høyrup 1992: 351–52].

² «It is true that they illustrated unknown numbers by means of lines and areas, but they always remained numbers. This is shown at once in the first example, in which the area xy

ho mostrato altrove³, questa conclusione è sbagliata: una interpretazione numerica spiega i numeri che si presentano nei testi, ma non la struttura della terminologia, né i particolari dell'esposizione verbale, né l'ordine delle operazioni matematiche; invece, questi livelli della lettura impongono una decifrazione geometrica.

È manifesto che certi testi babilonesi vedono l'addizione di lunghezze e superfici come ambigua. Per parlarne utilizzano una operazione che permette l'addizione delle misure numeriche delle due grandezze senza riguardo al senso concreto, e per tradurre la questione in problema geometrico procurano dopo esplicitamente la lunghezza con un «sporto 1», una larghezza che converte la linea s in un rettangolo $1 \times s$. Con questo sotterfugio, l'ambiguità è eliminata.

Però per la sottrazione, per esempio di un lato dall'area di un quadrato, non esiste una distinzione equivalente fra operazione numerica e operazione concreta. Inoltre, altri testi effettuano anche l'addizione di lunghezze e superfici senza far ricorso alla differenza fra operazioni e senza parlare del «sporto»⁴. Invece presuppongono direttamente le lunghezze come strisce che possono essere congiunte alle superfici o esserne tagliate.

Nonostante che la testimonianza della metrologia non sia del tutto limpida, anche in fondo al pensiero matematico paleobabilonese (particolarmente quando ci avviciniamo alla pratica geometrica) ritroviamo dunque la concezione delle lunghezze come portatrici di una «larghezza virtuale».

and the segment $x-y$ are calmly added, geometrically nonsensical» [van der Waerden 1962: 72].

³ Vedere in primo luogo [Høyrup 1990a].

⁴ Per di più, i testi che presuppongono la larghezza virtuale sembrano essere quelli che sono più prossimi alle origini della disciplina, i cui primi elementi sono stati adottati dalla scuola degli scribi da un ambiente di agrimensori, forse intorno al 1800 a.C. – vedere [Høyrup 1993]. La distinzione terminologica anziché il concetto esplicito dello sporto sono dunque fenomeni secondari, ripercussioni di una critica scolastica delle ambiguità assunti insieme con la tecnica dei geometrici pratici.

Euclide – «Erone» – Platone

Euclide afferma che una linea è una lunghezza senza larghezza ($\mu\eta\kappa\omicron\varsigma$ ἀπλατές – *Elementi* I, def. 2, [ed. Heiberg 1883: 1]). Né le *Definitiones* di Erone [ed. Heiberg 1912: 14–16] né il commentario di Proclo [96–100; trad. Morrow 1970: 79–82] suggeriscono che questa delimitazione (il senso etimologico di ὄρος, tradotto «definizione») del concetto sia una demarcazione rispetto all'idea della linea-striscia. A questo livello della matematica greca – quella della teoria matematica matura – non c'è traccia di una larghezza virtuale che appartiene alla linea.

Ad altri livelli – quelli più vicini alla misura pratica o polemizzanti contro di essi – esistono almeno tracce.

Dapprima ci sono le due antologie di pseudo-Erone, *Stereometrica* e *De mensuris* [ed. Heiberg 1914], nelle quali si spiega come trovare «quanto genera un piede sopra un piede» (*Stereometrica* 69; un po' differente *De mensuris* 27). La versione della *Stereometrica* discute dapprima 1 piede sopra 1 piede, moltiplicando 16 per 16 (poiché «1 piede possiede 16 dita». Poi, per trovare è spiegare 1½ piede sopra 1½ piede moltiplica 24 per 24, dividendo dopo il numero 576 che risulta per 16; trasforma dunque il quadrato in una striscia larga 1 piede, e trova la sua lunghezza essere di 36 [dita] o 2¼ piedi.

Che si tratta veramente di una intuizione della striscia e non di un semplice schema di calcolo è dimostrato con il terzo calcolo, quello di (½+¼) piede sopra (½+¼) piede. Moltiplica (8+4) con (8+4) e trova 144; ma invece di dividere per 16 (ciò che produrrebbe una «striscia» poco accettabile per l'intuizione perché meno lunga che larga) mette il prodotto direttamente in relazione con $16 \times 16 = 256$ e trova il rapporto essere di ½+¼/16.

Fin qui, *De mensuris* esegue gli stessi passi; ma mentre *Stereometrica* si ferma lì, *De mensuris* continua con 2 piedi sopra 2 piedi e (2+½+¼+⅛+1/16) piedi sopra (2+½+¼+⅛+1/16) piedi; in entrambi i casi ritorna alla trasformazione in striscia, confermando così che questo è il metodo da utilizzare quando la striscia prodotta è una striscia vera.

De mensuris 25 – un calcolo alternativo (o erroneo, oppure corrotto) della capacità di un teatro – presenta un secondo esempio. Trova l'area riservata agli spettatori come il prodotto del suo perimetro esterno (100 piedi) ed

interno (80 piedi), dunque 8000 piedi. Questo è anche il numero di spettatori, poiché «su 1 piede si siede un uomo, vuol dire su 16 dita». A questo Heiberg, pensando come un matematico moderno, fa notare che dovrebbero essere «256 dita», poiché si tratta di un'area. Tuttavia, le parole del testo sono legittime se l'area è percepita come composta da strisce larghe 1 piede e con una lunghezza totale di 8000 piedi, in particolare se la larghezza dei gradini è 1 piede; ma poiché quest'ultimo argomento sembra essere superfluo, l'idea di vedere un'area in tal modo era in apparenza sentita naturale⁵.

Un esempio meno ambiguo di questi si trova nella *Geometrica*, anche quella un'antologia pseudo-eroniana (24,3 – ed. Heiberg 1912: 418)⁶. Si tratta di un problema del tipo dell'«algebra» paleobabilonese (e effettivamente di un problema che sembra avere le sue radici nella stessa tradizione di agrimensori che era stata l'ispirazione per l'algebra della scuola degli scribi paleobabilonesi (cf. [Høyrup 1993] e nota 4): Il capitolo tratta di un quadrato, la cui area (A)

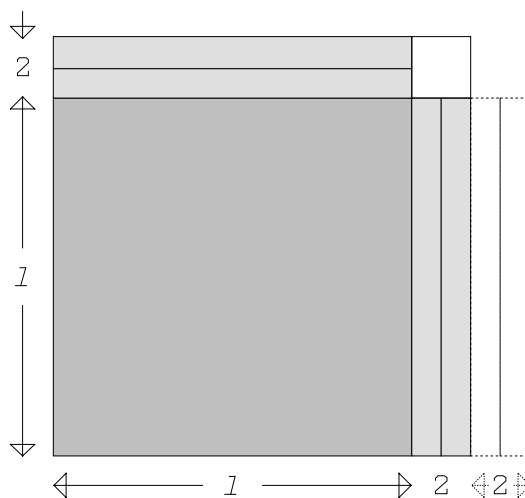


Figura 1.

insieme con il perimetro ($4l$) è di 896 piedi; bisogna separare l'area del perimetro. Si prende la metà delle 4 unità, e sorgono 2 *piedi* – vale a dire che il lato è veramente visto come un rettangolo con lunghezza l e larghezza 1 piede. La linea di 2 piedi è messa sopra se stessa, il che fa sorgere 4 piedi. Se costoro sono giunti agli 896, sorgono 900 piedi, e come lato quadratico dunque 30 piedi. Quando alle 4 sono tolte la metà, sorge un residuo [cioè il lato del quadrato originale] di 28 piedi. L'area è dunque [$28 \times 28 =$] 784 piedi, e il perimetro [$4 \times 28 =$] 112 piedi. Se tutto è messo insieme, sorge 896. Questa è l'area insieme con il perimetro. Il procedimento

⁵ La larghezza dei gradini nei teatri veri non può servirci. Nel capitolo precedente (il cui calcolo è giusto dal punto di vista matematico), la distanza fra gradini è pressappoco 10 cm! Anche lì, una persona occupa 1 piede di lunghezza.

⁶ La traduzione di Heiberg maschera una parte dell'argomento geometrico; faccio una parafrasi stretta del testo greco.

può essere seguito sulla figura.

Heiberg afferma che il compilatore ha copiato senza comprendere. È ovviamente possibile, anche se l'argomento di Heiberg sembra sbagliato⁷. Ma in questo caso ha copiato un testo greco scritto da qualcuno che comprendeva, e non tradotto lui stesso un testo scritto in un'altra lingua né copiato una tradizione fatta senza comprensione – come dimostra non solo l'utilizzazione della misura greca del piede, ma anche altre divergenze dello stile delle fonti possibili (sia la tradizione babilonese-aramaica-araba, sia la matematica eclettica dei papiri demotici). In generale, le tracce dell'idea di una larghezza virtuale che abbiamo trovati in pseudo-Erone sono legate a concetti e pratiche greci; possiamo concludere che riflettono abitudini mentali diffuse anche fra calcolatori greci.

Sia le lunghezze sia le aree sono già misurate in piedi nei dialoghi platonici. È il caso di due passi famosi (fra storici della matematica) dove Platone si riferisce al concetto di δύναμις: *Theaetetus* 147D, *Politicus* 266B. Già qui, l'indagine dei testi pseudo-eroniani suggeriscono che le espressioni δίπους, τρίπους e πεντέπους non devono essere interpretate come misure astratte, ossia come 2, 3 e 5 piedi quadri, ma invece come indicazioni che le aree di cui si parla sono uguali a strisce lunghe 2, 3 e 5 piedi [e larghe 1 piede].

C'è però un altro passo platonico che è più illuminato dall'idea delle strisce standardizzate: *Le leggi* 819D–820B [trad. Zadro 1952: 235–236]. Si parla dell'ignoranza di «tutti i Greci» [ordinari – il contesto dimostra che i matematici non sono inchiusi] riguardo alla commensurabilità. Dapprima, in generale, dell'opinione che lunghezza, larghezza e profondità «siano tutte e tre commensurabili fra di loro»; dopo, specificando, di due errori particolari,

(i) che «si può misurare una lunghezza con una lunghezza, una larghezza con una larghezza e una profondità con una profondità»,
e

(ii) che «la larghezza e la lunghezza [sono commensurabili] rispetto

⁷ Heiberg non ha seguito il processo geometrico, e non capisce che per trovare il lato l bisogna sottrarre dalle 30 esattamente questi due che sono rimasti quando la metà era tolta e «messa sopra». Vede dunque questo passo del testo come manifestazione di comprensione mancata.

alla profondità, e la lunghezza e la larghezza fra di loro».

Il primo errore si riferisce, senza dubbio, alla scoperta dei rapporti irrazionali, per esempio (il paradigma di Aristotele) quello fra il lato e la diagonale di un quadrato: non è vero che ogni lunghezza può misurare tutte le altre. Il secondo e più oscuro (cf. la discussione in [Mueller 1992: 94–95]). Se lunghezza, larghezza e profondità si intendono come estensioni lineari, il secondo errore non è differente dal primo. Un'altra possibilità è di comprendere «larghezza» e «profondità» come ellissi per «quantità che possiede *anche* larghezza» (dunque un'area) e «quantità che possiede *anche* profondità» (dunque un corpo, poiché questa dimensione è definita qui e altrove da Platone come «il terzo»).

A favore della seconda interpretazione parla non solamente che da questo punto di vista, (ii) diventa veramente un altro errore da (i), ma anche le abitudini dell'idioma matematico. Quando il giovane Theaetetus definisce numeri *quadrati* (*Theaetetus* 147E–148A) i numeri che possono generarsi come prodotti di fattori uguali (ma anche, non bisogna dirlo, di fattori differenti) e *numeri oblungi* gli altri – quelli che possono *solamente* essere generati come prodotti di fattori differenti –, siamo di fronte a un'ellissi analoga; la figura si ripete quando, un momento dopo, parla delle linee che sono *solamente* misurabili *dýnamei* (ossia, quando sono intese come parametri di un quadrato, cf. [Høyrup 1990b]) come *dýnameis* e degli altri – quelli che hanno *anche* una misura quando sono intesi direttamente come lunghezze – come *lunghezze*.

Più vicina nel contenuto alle ellissi presunte delle *Leggi* è quella presente nella definizione della linea degli *Elementi*. Come spiega Proclo nella sua discussione [96–97; trad. Morrow 1970: 79], non c'è bisogno di dire «senza larghezza e senza profondità» poiché tutto quello che è senza larghezza manca anche di profondità – «negando alla linea la larghezza [Euclide] la priva anche di profondità».

Nondimeno, Ian Mueller preferisce (con una punta di dubbio) la prima interpretazione. Infatti, l'errore di supporre le lunghezze, le superfici e i corpi commensurabili solamente perché tutti sono misurati in piedi gli sembra così triviale che non sia possibile parlare di (ii) come di un errore.

Però, come abbiamo visto, la misura comune in «piedi» è più di una semplice mancanza di simboli per distinguere «piedi», «piedi²» e «piedi³».

È coinvolto tutto un modo di pensare, e se una lunghezza comporta una larghezza virtuale (e attuabile quando c'è bisogno), non è un errore triviale pensare che le lunghezze e le superfici possono essere commensurabili – neppure è un errore da questo punto di vista.

Era tuttavia un errore dal punto di vista di coloro che hanno fatto della geometria una scienza invece di una tecnica. Per loro, come per Platone, non solamente era un errore, ma un errore che bisognava estirpare, come era da estirpare l'errore che tutte le lunghezze fossero commensurabili fra di loro. Ricordiamoci dello «sporto» nella scuola paleobabilonese, che sembra aver avuto una funzione corrispondente (nota 4).

Conclusion

Ritorniamo alla definizione della linea. Né Erone (il vero) né Proclo sembrano comprendere «senza larghezza» come inteso a escludere l'idea della linea-striscia; probabilmente il problema era già dimenticato dai matematici quando Euclide scrisse i suoi *Elementi*. Ma la definizione non è invenzione di Euclide. Si ritrova nelle stesse parole (come definizione già in uso) in *Topica* 143^b11 [ed. Tredennick & Forster 1960: 591]; è possibile che fosse la definizione utilizzata dai matematici amici di Platone; è anche possibile che fosse più vecchia. Quello che è interessante è l'argomento di Aristotele: Una tale definizione chiede che il genere (le lunghezze) sia diviso in due specie, le lunghezze provviste di larghezza e quelle che ne sono sprovviste. Infatti, dice Aristotele, queste specie esistono tutte e due; questo dimostra che le idee [platoniche] non possono esistere – l'idea della lunghezza o avrebbe larghezza, o no, ma nei due casi sarebbe impossibile l'esistenza di ambedue le specie del stesso genere.

Non è sicuro che le «lunghezze provviste di larghezza» siano le strisce dell'agrimensura pratica; potrebbero anche essere superfici. Né, però, sembra escluso. Resta possibile che la delimitazione «senza larghezza» sia stata dapprima intesa come demarcazione rispetto all'idea della linea-striscia.

Più fondata è l'interpretazione del passo delle *Leggi*. Solamente l'idea delle linee-strisce (e delle superfici-fette) ci permettono di trovare due errori tanto differenti quanto sostanziali.

Con riguardo ai testi matematici, la mancata nozione della linea-striscia è stata la responsabile principale dell'interpretazione sbagliata dell'«algebra» babilonese come tecnica puramente numerica. Come abbiamo visto, l'«errore» (ii) è stato estirpato a tal punto che Heiberg, quando a fatto l'edizione della *Geometrica* pseudo-eroniana, a visto gaffe dov'era una descrizione precisa e giusta.

Ogni pensiero matematico che funziona comporta entro di sé una gamma di ambiguità. Nella geometria euclidea, per esempio, un quadrato è *una figura* (una σχῆμα – *Elementi* I, def. 25), dunque qualcosa contenuta per una o più *limite* (ὅροι – def. 14). Ma un quadrato può anche essere uguale a una o più altre figure (per esempio *Elementi* II, prop. 14), ed è dunque ridotto da questo punto di vista alla sua area. In un discorso matematico determinato, queste ambiguità concettuali restano di regola nascoste, contenute nello spazio delle operazioni da cui dipendono i concetti e di cui parla la terminologia: se un quadrato è tagliato da una diagonale, si tratta ovviamente della figura; se è detto 5 volte un altro si tratta dell'area.

Questa assenza di pedanteria contribuisce all'efficienza del pensiero. Ma quando il matematico – sia il matematico-storico, sia il matematico-insegnante – crede che solamente il discorso degli altri e non il suo comporti ambiguità; quando non capisce che anche le ambiguità degli altri sono solamente virtuali poiché contenute nel *loro* spazio di operazioni; quando dimentica dunque che esattamente queste *ambiguità diverse* sono chiavi privilegiate per comprendere il pensiero diverso degli altri; allora l'assenza di pedanteria nel proprio discorso diventa pedanteria e intolleranza verso gli altri, e ostacolo per la comprensione.

Forse scoprire questa intolleranza negli studi storici e il sforzo di vincerla lì può contribuire a vederla e vincerla nell'insegnamento della matematica – altrimenti più importante in questo mondo – lo storico deve confessarselo – della storia pura della disciplina.

Jens Høyrup
5 luglio, 1994

BIBLIOGRAFIA

- Boncompagni, Baldassare (ed.), 1862. *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*. Vol. II. *Practica geometriae et Opusculi*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.
- Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1883. *Euclidis Elementa*. Vol. I. (*Euclidis Opera omnia*, vol. I). Leipzig: Teubner.
- Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1912. *Heronis Definitiones cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur Geometrica*. (*Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, IV). Leipzig: Teubner.
- Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1914. *Heronis quae feruntur Stereometrica et De mensuris*. (*Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, V). Leipzig: Teubner.
- Høyrup, Jens, 1990a. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* 17, 27–69, 262–354.
- Høyrup, Jens, 1990b. "Dýnamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7—148d7". *Historia Mathematica* 17, 201–222.
- Høyrup, Jens, 1992. "The Babylonian Cellar Text BM 85200 + VAT 6599. Retranslation and Analysis". Pp. 315–358 in S. S. Demidov et al (eds), *Amphora*. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag. Basel etc.: Birkhäuser.
- Høyrup, Jens, 1994. "«The Four Sides and the Area». Oblique Light on the Prehistory of Algebra". In via di pubblicazione in Ronal Calinger (ed.), *History of Mathematics: Sources, Studies, and Pedagogic Integration*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.
- Morrow, Glenn R. (ed., trans.), 1970. *Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Mueller, Ian, 1992. "Mathematics and Education: Some Notes on the Platonic Programme". Pp. 85–104 in I. Mueller (ed.), *Peri Tōn Mathēmatōn*. Edmonton, Alberta: Academic Printing and Publishing.
- Pacioli, Luca, 1523. *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalita*. Novamente impressa. Toscolano: Paganinus de Paganino. [1494].
- Parker, Richard A., 1972. *Demotic Mathematical Papyri*. Providence & London: Brown University Press.
- Peet, T. Eric, 1923. *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*. London: University Press of Liverpool.
- Tredennick, Hugh, & E. S. Forster (eds, trans.), 1960. *Aristotle, Posterior Analytics and Topica*. (Loeb Classical Library 391). Cambridge, Mass.: Harvard University Press / London: Heinemann.
- van der Waerden, B. L., 1962. *Science Awakening*. 2nd Edition. Groningen: Noordhoff. [1954].
- Zadro, Attilio (trad.), 1952. *Platone, Dialoghi*. Vol. VII. *Le leggi*. Bari: Laterza.